

Varianta 3

Subiectul I

- a) $AB = \sqrt{26}$.
- b) $a = 11$ și $b = 10$.
- c) $S = 3\sqrt{3}$.
- d) $12 + 7i$.
- e) $a = 5$ și $b = -13$.
- f) $BC = 10$.

Subiectul II

1.

- a) $\begin{vmatrix} 10 & -2 \\ 20 & -3 \end{vmatrix} = -30 + 40 = 10$.
 - b) $p = \frac{2}{5}$.
 - c) $x = \frac{1}{4}$.
 - d) $x = 6^3$.
 - e) Aplicând teorema împărțirii cu rest obținem câtul $x^2 - 3$ și restul 4.
- 2.

- a) $f'(x) = \frac{-10}{x^{11}}, x \in \mathbf{R}^*$.
- b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -10$.
- c) $D = \mathbf{R}^*$; $x = 0$ este ecuația asimptotei verticale.
- d) $\int_1^2 f(x) dx = \frac{91}{9} - \frac{1}{9 \cdot 2^9}$.
- e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{n^5} = 1$.

Subiectul III

- a) Se verifică prin calcul direct.
- b) Se verifică prin calcul direct.
- c) $B^2 = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$.

d) $\frac{3x-1}{4x-1} - \frac{1}{2} = \frac{2x-1}{2(4x-1)} > 0$, dacă $x > \frac{1}{2}$.

e) $(f \circ f)(x) = \frac{3f(x)-1}{4f(x)-1} = \frac{5x-2}{8x-3}$.

f) Notăm $P(n): B^n = I_2 + nA, \forall n \in \mathbf{N}^*$.

Pentru $n=1$ obținem $B^1 = I_2 + A$, adevărat din punctul a).

Presupunând că $P(k)$ este adevărată pentru $k \in \mathbf{N}^*$, arătăm că $P(k+1)$ este adevărată.

Dar $B^{k+1} = B^k \cdot B = (I_2 + kA) \overset{a)}{B} = (I_2 + kA)(I_2 + A) = I_2 + kA + A + kA^2$

$\overset{b)}{=} I_2 + kA + A = I_2 + (k+1)A$. Deci $P(k+1)$ este adevărată.

Ambele etape fiind verificate, concluzionăm că $\forall n \in \mathbf{N}^*, B^n = I_2 + nA$.

g) Demonstrăm prin inducției, relația cerută.

$P(n): \underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}_{\text{de } n \text{ ori } f}(x) = \frac{(2n+1)x-n}{4nx+1-2n}, n \in \mathbf{N}^*.$

Presupunând că $P(k)$ este adevărată pentru $k \in \mathbf{N}^*$, arătăm că $P(k+1)$ este adevărată.

Dar $\underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}_{\text{de } k+1 \text{ ori } f}(x) = \underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}_{\text{de } k \text{ ori } f}(f(x)) = \frac{(2k+1)f(x)-k}{4kf(x)+1-2k}$
 $= \frac{(2k+3)x-(k+1)}{4(k+1)x+1-2(k+1)}$. Deci $P(k+1)$ este adevărată.

Ambele etape fiind verificate, concluzionăm că $P(n) \forall n \in \mathbf{N}^*$.

Subiectul IV

a) $f'(x) = ((x+1)(x+2)(x+3))' = 3x^2 + 12x + 11$.

b) Se verifică prin calcul direct.

c) $f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 12x + 11 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{-6+\sqrt{3}}{3}$ și $x_2 = \frac{-6-\sqrt{3}}{3}$.

d) Rezultă $x_1 = \frac{-6-\sqrt{3}}{3}$ este punct de maxim local, iar $x_2 = \frac{-6+\sqrt{3}}{3}$ este punct de minim local.

e) $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x^3 + 6x^2 + 11x + 6) dx = \frac{55}{4}$.

f) Prin calcul direct, rezultă $\frac{1}{2}((f'(x))^2 + f'(x) + 1) - \frac{1}{2}((f'(x))^2 - f'(x) + 1) = f'(x), \forall x \in \mathbf{R}.$

g) Din **f)** rezultă $f'(t) = \frac{1}{2}((f'(t))^2 + f'(t) + 1) - \frac{1}{2}((f'(t))^2 - f'(t) + 1), \forall t \in \mathbf{R},$

de unde $\int_0^x f'(t) dt = \int_0^x \frac{1}{2}((f'(t))^2 + f'(t) + 1) dt - \int_0^x \frac{1}{2}((f'(t))^2 - f'(t) + 1) dt, \forall x \in \mathbf{R} \quad (1).$

Notăm $g(x) = \int_0^x \frac{1}{2}((f'(t))^2 + f'(t) + 1) dt$ și $h(x) = \int_0^x \frac{1}{2}((f'(t))^2 - f'(t) + 1) dt.$ Atunci

$g'(x) = \frac{1}{2}((f'(x))^2 + f'(x) + 1) > 0$ și $h'(x) = \frac{1}{2}((f'(x))^2 - f'(x) + 1) > 0, \forall x \in \mathbf{R},$ rezultă

că funcțiile g și h sunt strict crescătoare pe $\mathbf{R},$ iar egalitatea **(1)** devine

$f(x) - f(0) = g(x) - h(x).$ Cum $f(0) = 6$ rezultă $f(x) = (g(x) + 6) - h(x), \forall x \in \mathbf{R}$ cu $g + 6$ și h strict crescătoare pe $\mathbf{R}.$